

Modèles à 1 et 2 matrices et fonction génératrice de cylindres à bords bicolores.

N. Orantin¹

Service de Physique théorique, CEA/Saclay
Orme des Merisiers F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Abstract:

Je vais traiter dans ce rapport des modèles à une et deux matrices comme outil pour étudier les théories conformes avec bords. J'introduirai dans un premier temps certains résultats bien connus que le lecteur pourra trouver en grande partie dans les ouvrages de références que sont [31], [30] et [14] pour ce qui est des matrices aléatoires et [20] pour la géométrie algébrique. Pour ce faire, après une rapide présentation historique des matrices aléatoires et de leurs applications, je m'intéresserai tour à tour aux modèles à une et deux matrices, présentant leur formalisme, expression en termes de diagrammes de Feynmann et surfaces aléatoires ainsi que leur lien avec les théories conforme. Je conclurai sur le modèle à deux matrices en expliquant la méthode des équations de boucles. Je m'attacherai dans un second temps à présenter un travail de recherche personnel consistant en le calcul de la fonction de corrélation génératrice des surfaces aléatoires ayant la forme d'un cylindre aux bords bicolores.

1 Introduction de la notion de matrices aléatoires et de leurs applications.

Parmi les nombreuses applications des matrices aléatoires en physique que j'aborderai plus bas, je me suis particulièrement intéressé à leur interprétation en termes de surfaces aléatoires. En effet, les intégrales de matrices peuvent être vues comme les fonctions génératrices de surfaces discrétisées avec ou sans bords. Les opérateurs vivant sur ces surfaces sont décrit par les théories conformes dans la limite où les surfaces discrétisées deviennent continues. Les exposants critiques de tels opérateurs sont bien connus lorsque ceux ci vivent à l'intérieur de la surface ([29]). Les opérateurs agissant sur les bords sont quant à eux bien moins connus et les modèles de matrices semblent être un bon outil pour

¹orantin@sph.t.saclay.cea.fr

déterminer leurs exposants critiques. Les fonctions génératrices des surfaces avec deux et quatre opérateurs sur un même bord ayant déjà été déterminées ([19], [16]), ces notes ont pour but de présenter le calcul de la fonction génératrice des surfaces avec deux bords portant chacun deux opérateurs.

1.1 Historique.

Le terme aléatoire associé aux matrices dont je vais introduire l'étude dans ce rapport semblerait induire que ces dernières sont apparues comme un outil pour la physique statistique. Cependant, il en a été tout autrement.

En effet, elles ont vu le jour dans le cadre de la physique atomique et plus précisément dans le cadre de l'étude de noyaux lourds par Wigner en 1951 ([31]). Le spectre en énergie de ces derniers étant trop dense pour pouvoir tenir compte séparément de chaque niveau, Wigner a considéré le problème d'un point de vue statistique. Il a observé que la distribution moyenne des niveaux d'énergie, des fonctions de corrélation ainsi que d'autres paramètres tels que l'espacement moyen entre les niveaux d'énergie, correspondaient au spectre d'une matrice aléatoire suivant une loi de probabilité gaussienne prise dans un ensemble dépendant du problème considéré (je reviendrai plus loin sur la correspondance entre ensemble de matrices et caractéristiques du problème considéré). La surprenante fidélité des résultats expérimentaux avec cette description en termes de matrices imposa pour la première fois les matrices aléatoires comme un puissant outil mathématique de description de systèmes physiques complexes.

Dès lors, les matrices aléatoires ont connu un succès sans cesse grandissant en apparaissant dans de nombreux domaines de la physique pourtant éloignés les uns des autres. Avant d'aller plus avant dans une présentation technique de cet outil, je vais brièvement introduire certains de ses principaux domaines d'application ainsi que l'une de ses principales caractéristiques: le principe d'universalité.

1.2 Le principe d'universalité.

On peut considérer la notion de matrice aléatoire comme une généralisation des nombres aléatoires. On est alors en droit de se demander s'il existe un équivalent au théorème centrale-limite dans le cas des matrices. Ce comportement particulier aux grands nombres peut être observé lorsque l'on fait tendre la taille des matrices vers l'infini. Le spectre obtenu dans cette limite ne dépend plus de la loi de probabilité initiale mais simplement des symétries de l'ensemble de matrices considéré.

Ce comportement n'est, pour l'instant, que conjecturé. Cependant, les vérifications expérimentales ainsi que des démonstrations dans des cas précis permettent d'avoir suffisamment confiance en cette propriété pour en faire l'une des principales composantes du domaine. Elle permet en effet de connaître le comportement de n'importe quel ensemble de matrices, à grand nombre de variables, en utilisant une loi de probabilité gaussienne.

Il est alors important de classer les différents ensembles de matrices selon leurs propriétés de symétries. On rencontre trois catégories de tels ensembles selon le point de

vue que l'on adopte, mais je n'en présenterai ici que deux, la troisième correspondant aux matrices de transfert. D'une part, on peut considérer le hamiltonien comme une matrice aléatoire suivant une loi de probabilité gaussienne. On devra alors considérer les ensembles suivants:

- Lorsqu'il n'y a aucune symétrie particulière, on considère l'ensemble des matrices hermitiennes, appelé Gaussian Unitary Ensemble (GUE), car il est invariant par les transformations unitaires;
- Lorsque l'on ajoute une invariance du système par renversement du temps, il convient alors de considérer l'ensemble des matrices réelles symétriques, appelé Gaussian Orthogonal Ensemble (GOE);
- Si, de plus, le système a un spin total demi-entier et que la symétrie de rotation est brisée, on utilisera l'ensemble des matrices quaternioniques self-duales réelles, appelé Gaussian Symplectic Ensemble (GSE).

D'autre part, on peut considérer l'opérateur d'évolution comme une matrice aléatoire suivant une loi de probabilité constante, ce qui fait apparaître les ensembles suivants:

- Sans symétrie particulière, on aura l'ensemble des matrices unitaires ou Circular Unitary Ensemble (CUE);
- Avec renversement du temps, on prendra les matrices orthogonales, soit le Circular Orthogonal Ensemble (COE);
- Enfin, on peut considérer l'ensemble des matrices symplectiques, le Circular Symplectic Ensemble (CSE).

1.3 Quelques applications.

L'idée la plus naturelle d'utilisation des matrices aléatoires consiste simplement à considérer un système désordonné ([25]) où le hamiltonien est lui-même une matrice aléatoire. Selon les symétries précédemment énumérées, on aura le hamiltonien dans les ensembles GUE, GOE ou GSE.

Une seconde application intervient lors de l'étude d'un problème tout aussi naturel: le chaos quantique ([25]). Si l'étude des systèmes chaotiques est bien connue en mécanique classique, sa généralisation en mécanique quantique est très problématique. Là encore, les matrices aléatoires apparaissent indirectement. En effet, le hamiltonien du système considéré n'est pas à proprement parler aléatoire. Cependant, les observations ont montré que, si le problème classique associé est chaotique, son spectre est le même que celui d'une matrice aléatoire appartenant aux ensembles GUE, GOE ou GSE. On peut également considérer l'opérateur d'évolution qui, lui, appartiendra à l'un des ensembles CUE, COE ou CSE. Notons que cette relation entre chaos quantique et matrices aléatoires n'est pas démontrée mais simplement observée expérimentalement et conjecturée théoriquement.

Les matrices aléatoires apparaissent également en chromodynamique quantique (QCD). Cette théorie suppose l'existence de particules fondamentales constitutives des hadron, les quarks et les gluons, qui caractérisent l'échange de la charge de couleur (de dimension $N=3$) entre les quarks. Cet échange se traduit par une matrice 3×3 . De manière analogue à la mécanique quantique où l'on doit intégrer sur tous les états possibles, il est ici nécessaire de considérer un ensemble de matrices pondéré par une loi de probabilité. L'utilisation du modèle de matrices aléatoires a permis d'obtenir des prédictions non perturbatives. Pour ce faire, il a été proposé par 't Hooft ([33]) de faire un développement en puissance de $1/N$ quand le nombre de couleur N est artificiellement amené à tendre vers $+\infty$. Ce développement en puissances de $1/N$ est en fait un développement topologique sur lequel nous reviendrons plus loin. On peut également profiter du principe d'universalité en faisant tendre le nombre de degrés de libertés du système vers l'infini ([34]). Enfin, cet outil mathématique permet de faire un lien entre la QCD et la théorie des cordes ([11], [10], [23], [24]), sujet que nous allons aborder dans le prochain paragraphe.

Les matrices aléatoires et la théorie des cordes se sont rencontrées à plusieurs reprises ([11], [12], [13]). Je ne vais évoquer ici qu'un aspect de cette relation. Comme nous le verrons plus loin, les matrices aléatoires permettent, grâce au développement topologique mis en place pour la QCD, de décrire et de sommer des surfaces aléatoires. Or, les cordes évoluant dans le temps, forment justement de telles surfaces ([5], [3]). Il est donc naturel d'utiliser un modèle de matrices pour traiter un tel problème. Bien que les modèles de matrices permettent d'avoir une théorie de la sommation des surfaces, ils sont limités à l'étude de la théorie des cordes en dimension $D \leq 1$, ce qui empêche d'atteindre le cas physique $D = 10, 26$. Cependant, les modèles de matrices restent intéressants que ce soit comme toy-model pour $D \leq 1$ ou grâce aux autres liens qu'ils entretiennent avec la théorie des cordes et les récentes tentatives d'unifications comme la théorie M ([12], [4], [26]).

Au cours de cet exposé, je reviendrai plus longuement sur deux autres importantes applications: l'étude des surfaces aléatoires et celle des théories conformes.

2 Modèle à une matrice.

2.1 Introduction des notations.

En premier lieu, introduisons les notations utilisées tout au long de ces notes ainsi que certaines considérations générales.

Soit un ensemble E de matrices de taille $N \times N$ sur lequel on définit une loi de probabilité $P(M)$ comme un poids de Boltzmann:

$$P(M) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{N}{T} \text{Tr} V(M)} dM \quad (1)$$

où le potentiel $V(M)$, la mesure dM (dans le cas où E est l'ensemble des matrices

hermitiennes) et la fonction de partition Z sont définis par:

$$\begin{aligned} dM &= \prod_{i=1}^N dM_{ii} \prod_{i < j} dReM_{ij} dImM_{ij} \\ Z &= \int_E dM e^{-\frac{N}{T} \text{Tr}V(M)} = e^{-\frac{N^2}{T^2} F} \\ V(x) &= V_0 + \sum_{k=1}^{d+1} \frac{t_k}{k} x^k \end{aligned} \quad (2)$$

Note : le cas gaussien évoqué précédemment correspond au potentiel $V(x) = \frac{t_2}{2}x^2$.

Nous avons introduit ici l'énergie libre F qui est une fonction fondamentale dans l'étude des matrices aléatoires. On montrera ainsi facilement que :

$$\begin{aligned} k \frac{\partial F}{\partial t_k} &= \frac{1}{N} \langle \text{Tr}M^k \rangle \\ \frac{\partial^2 F}{\partial t_k \partial t_j} &= -\frac{1}{kj} \langle \text{Tr}M^k \text{Tr}M^j \rangle_c \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ k_1 \dots k_n \frac{\partial^n F}{\partial t_{k_1} \dots \partial t_{k_n}} &= (-1)^{n-1} N^{n-2} \langle \text{Tr}M^{k_1} \dots \text{Tr}M^{k_n} \rangle_c \end{aligned} \quad (3)$$

où l'on a noté $\langle \prod x_i \rangle = \langle \prod x_i \rangle_c + \sum_i \langle x_i \rangle \langle \prod_{j \neq i} x_j \rangle_c + \sum_{i,j \neq i} \langle x_i x_j \rangle_c \langle \prod_{k \neq i,j} x_k \rangle_c + \dots + \prod \langle x_i \rangle$.

Notons que les dérivées secondes de l'énergie libre par rapport aux t_i correspondent à des fonctions de corrélation à deux points et sont en fait des fonctions universelles. De manière plus générale, toute dérivée seconde de F est une telle fonction universelle ([14], [2]) et ce sont ces dernières qui sont porteuses du principe d'universalité.

2.2 Expression en termes de diagrammes de Feynman et de surfaces aléatoires.

Comme il l'a été dit plus tôt, l'une des principales applications des matrices aléatoires se rapporte à leur interprétation en termes de diagrammes de Feynman ([9], [10], [7]).

Considérons l'ensemble E des matrices hermitiennes M . On aimerait calculer la fonction de partition Z définie plus haut. Afin d'obtenir une interprétation des modèles de matrices en gravité quantique, on va procéder par un développement perturbatif autour d'un potentiel gaussien. En effet, on sait effectuer ce calcul dans le cas d'un potentiel gaussien et l'on pourra ainsi obtenir le cas général comme perturbation de l'intégrale gaussienne. Notons l'analogie avec la physique des particules où le potentiel gaussien correspond à des particules libres sans interaction, les intégrales perturbées étant obtenues comme un développement en diagrammes de Feynman. Dans le cas des matrices aléatoires, ce développement analogue en diagrammes s'identifiera à un développement topologique en termes de surfaces.

Définissons donc δV par :

$$V(M) = V_0 + \frac{t_2}{2} M^2 - \delta V(M) \quad (4)$$

En considérant la partie quadratique au voisinage de son minimum comme dominante et effectuant le développement à δV petit, on peut écrire le développement :

$$Z = e^{-\frac{N^2 V_0}{T}} \int_E dM e^{-\frac{N t_2}{2T} Tr M^2} \left(1 + \frac{N}{T} Tr \delta V(M) + \frac{N^2}{2T^2} [Tr \delta V(M)]^2 + \dots \right) \quad (5)$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} Z &= e^{-\frac{N^2 V_0}{T}} \int_E dM e^{-\frac{N t_2}{2T} Tr M^2} \left\langle e^{\frac{N}{T} Tr \delta V} \right\rangle_0 \\ &= e^{-\frac{N^2 V_0}{T}} \int_E dM e^{-\frac{N t_2}{2T} Tr M^2} \left(1 + \frac{N}{T} \langle Tr \delta V \rangle_0 + \frac{N^2}{2T^2} \langle (Tr \delta V)^2 \rangle_0 + \dots \right) \end{aligned} \quad (6)$$

où l'indice 0 indique que l'on moyenne sur la distribution gaussienne $\int dM e^{-\frac{N t_2}{2T} Tr M^2}$.

Dès lors, le théorème de Wick permet de décomposer les moyennes de produits de variables aléatoires en une somme sur tous les appariements du produit des valeurs moyennes par paires.

Par exemple :

$$\langle \phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \rangle_0 = \langle \phi_1 \phi_2 \rangle_0 \langle \phi_3 \phi_4 \rangle_0 + \langle \phi_1 \phi_3 \rangle_0 \langle \phi_2 \phi_4 \rangle_0 + \langle \phi_1 \phi_4 \rangle_0 \langle \phi_2 \phi_3 \rangle_0 \quad (7)$$

C'est ce développement qui est à la base de la représentation diagrammatique de l'intégrale. Pour représenter chaque terme de ce développement sous forme de diagramme, nous allons introduire des règles de Feynman expliquant comment les tracer et quel poids leur attribuer.

2.2.1 Les règles de Feynman.

Les règles de Feynman consistent à faire correspondre à chaque terme sous forme d'une valeur moyenne, une représentation diagrammatique composée de vertex reliés entre eux par des propagateurs.

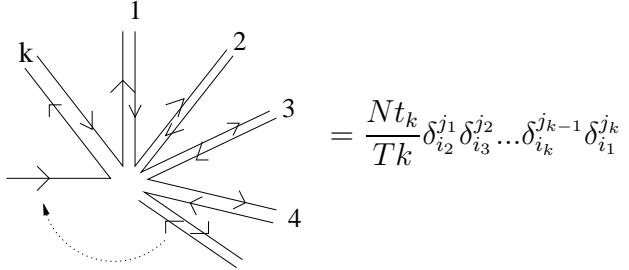
La règle fondamentale consiste à définir le propagateur correspondant à la valeur moyenne du produit d'une paire de variables gaussiennes. Le propagateur est donné, comme il est d'usage en théorie des champs, par l'inverse de la partie quadratique :

$$\begin{array}{c} i \xrightarrow{\quad} \\ j \xleftarrow{\quad} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ k \end{array} = \left\langle M_i^j M_k^l \right\rangle_0 = \frac{T}{N t_2} \delta_i^l \delta_j^k \quad (8)$$

Notons que, contrairement à la théorie classique des champs, le propagateur n'est pas simplement une ligne non orientée, mais est composé de doubles lignes orientées.

Les vertex, représentant les termes de la forme $\left\langle \frac{N t_k}{k T} Tr M^k \right\rangle_0$, sont quant à eux issus de $\langle Tr \delta V \rangle_0$. Chaque terme de degré k sera représenté par un diagramme à k lignes externes sous la forme de lignes doubles orientées de façon à pouvoir les connecter à des

propagateurs. On a alors, pour le terme de degrés k du potentiel :



$$= \frac{Nt_k}{Tk} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \dots \delta_{i_k}^{j_{k-1}} \delta_{i_1}^{j_k} \quad (9)$$

2.2.2 Détermination du développement diagrammatique.

Les règles de Feynman en main, nous avons les outils pour déterminer le développement diagrammatique de Z . On a, en effet :

$$\frac{Z}{e^{-\frac{N^2 V_0}{T}} \int_E dM e^{-\frac{Nt_2}{2T} \text{Tr} M^2}} = \sum_{\{n_k\}} \left\langle \prod_k \frac{1}{n_k!} \left(-\frac{Nt_k}{Tk} \text{Tr} M^k \right)^{n_k} \right\rangle_0 \quad (10)$$

On peut développer chaque terme de la forme $\left\langle \prod_k \frac{1}{n_k!} \left(-\frac{Nt_k}{Tk} \text{Tr} M^k \right)^{n_k} \right\rangle_0$ en une somme sur les diagrammes à n_k vertex à k lignes externes dont le poids est :

$$\frac{1}{\Omega} \left(\frac{T}{t_2 N} \right)^{n_p} \prod_k \left(-\frac{Nt_k}{T} \right)^{n_k} N^l \quad (11)$$

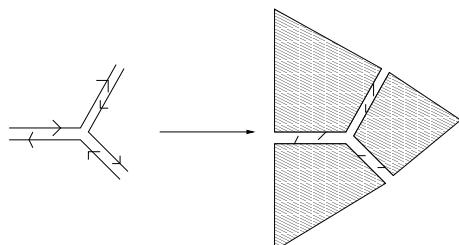
où Ω est le facteur de symétrie du diagramme, n_k le nombre de vertex à k pattes externes, $n_v = \sum_k n_k$ le nombre total de vertex et l le nombre de boucles du diagramme.

Z s'obtient donc comme la somme de tous les diagrammes formés de n_k vertex à k pattes, n_p propagateurs et comprenant l boucles auxquels on a associé le poids :

$$\frac{1}{\Omega} N^{n_v - n_p + l} T^{n_v - n_p} t_2^{n_p} \prod_k (-t_k)^{n_k} \quad (12)$$

2.2.3 Lien diagramme-surface.

Les diagrammes définis plus tôt peuvent être interprétés de manière géométrique. En effet, à tout vertex à k pattes, on peut faire correspondre un polygone à k côtés tel que chaque côté soit orthogonal à un propagateur. Par exemple, un vertex à trois pattes donne un triangle et un vertex à 4 lignes externes donne un carré.



$$\rightarrow \quad (13)$$

On obtient ainsi une relation de dualité mettant en correspondance un diagramme avec une surface discrétisée. Le développement précédent peut alors être vu comme une sommation sur les surfaces discrétisées. Ainsi, un diagramme ne comprenant que des vertex à trois pattes sera le dual d'une surface découpée selon des triangles.

Peut-on alors avoir une expression directe de Z comme duale de (12)? Ceci n'est possible qu'en séparant les diagrammes non-connexes des diagrammes connexes. Pour ce faire, introduisons une nouvelle fonction de partition.

Soit $\tilde{Z} = \ln Z$. Le développement diagrammatique de \tilde{Z} s'obtient en restreignant la sommation obtenue pour Z sur les diagrammes connexes:

$$\tilde{Z} = \sum_{\text{diagrammes connexes}} \frac{1}{\Omega} N^{n_v - n_p + l} T^{n_v - n_p} t_2^{-n_p} \prod_k (-t_k)^{n_k} \quad (14)$$

\tilde{Z} peut alors être interprété comme la fonction de partition d'un ensemble de surfaces aléatoires tirées avec un poids de Boltzmann. Notons les interprétations des paramètres définis précédemment: t_k représente la fugacité des polygones à k côtés; t_2 joue le rôle d'énergie de liaison entre les polygones; n_p représente le nombre d'arêtes; n_v est le nombre de polygones constitutifs de la surface; l est le nombre de sommets; $\chi = n_v - n_p + l$, exposant de N , représente la caractéristique d'Euler Poincaré de la surface.

2.2.4 Développement topologique en $1/N^2$.

Le développement en puissances de N effectué plus haut peut s'interpréter de manière géométrique. Considérons en premier lieu le développement diagrammatique. $\chi = n_v - n_p + l$, l'exposant de N , est en fait une propriété de la surface sur laquelle peut être dessiné le diagramme considéré pour ne pas avoir de lignes qui se croisent. Par exemple, les diagrammes correspondants à $\chi = 2$ peuvent être tracés sur un plan, $\chi = 0$ sur un tore etc... De manière générale, si l'on note $\chi = 2 - 2h$, h est le genre d'une telle surface, c'est à dire, son nombre de trous. Ainsi, un diagramme de caractéristique $\chi = 2 - 2h$ ne peut être dessiné que sur une surface avec au moins h trous.

De même, dans la description en termes de surfaces discrétisées, le développement de \tilde{Z} peut être vu comme un développement topologique. Ainsi:

$$\tilde{Z} = \sum_{h=0}^{+\infty} N^{2-2h} \tilde{Z}_h \quad (15)$$

où \tilde{Z}_h est la fonction de partition restreinte aux surfaces polygonales de genre h . On a ainsi un développement topologique selon le genre des surfaces, qui donne accès aux fonctions \tilde{Z}_h de genre h fixé. Notons que la limite N grand sélectionne les surfaces de genre

0. On l'appelle limite planaire ou limite sphérique.

$$\tilde{Z} = N^2 \left(\text{circle} \right) + N^0 \left(\text{elliptical loop} \right) + N^{-2} \left(\text{double loop} \right) + O(N^{-4}) \quad (16)$$

2.2.5 Interprétation de $\langle TrM^n \rangle$.

Remarquons que le calcul de Z ne fait intervenir que des surfaces fermées duales de diagrammes eux aussi fermés. Comment tenir compte des surfaces ouvertes, i.e. avec bords?

Dans ce paragraphe, nous allons introduire de telles surfaces en nous intéressant aux fonctions génératrices :

$$T_n = \langle TrM^n \rangle = \frac{1}{Z} \int dM (TrM^n) e^{-NTrV(M)} \quad (17)$$

Du fait de la présence du facteur TrM^n , chaque surface intervenant dans le calcul de T_n contient au moins un polygone à n cotés. Le reste du diagramme est donc une surface à laquelle on a enlevé un tel polygone. C'est donc une surface avec un bord de longueur n , et l'on a la relation :

$$\frac{1}{n} T_n = \sum_{\text{surface de bord } n} \frac{1}{\Omega} N^\chi T^{n_k - n_p} t_2^{-n_p} \prod_k (-t_k)^{n_k} \quad (18)$$

Que devient le développement topologique défini pour les surfaces sans bords? Il est toujours valable en tenant compte de la modification dans la définition de la caractéristique d'Euler Poincaré χ d'une surface avec un bord : $\chi = 1 - 2h$.

On peut alors écrire le développement topologique :

$$T_n = \sum_h N^{1-2h} T_{n[h]} = N \left(\text{circle with a handle} \right) + N^{-1} \left(\text{elliptical loop with a handle} \right) + N^{-3} \left(\text{double loop with a handle} \right) + \dots \quad (19)$$

où $T_{n[h]}$ est la fonction de partition partielle des surfaces de genre h ayant un bord de longueur n .

Il sera très utile pour la suite de définir la résolvante qui jouera le rôle de fonction de partition grand canonique :

$$\omega(z) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{z^{n+1}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{+\infty} \left\langle \frac{TrM^n}{z^{n+1}} \right\rangle = \frac{1}{N} \left\langle Tr \frac{1}{z - M} \right\rangle \quad (20)$$

On peut généraliser la notion de surface avec bord en considérant les surfaces avec plusieurs bords. Pour ce faire, introduisons la fonction génératrice des surfaces ayant m bords de longueurs l_1, \dots, l_m définie par :

$$T_{l_1, \dots, l_m} = \left\langle TrM^{l_1} \dots TrM^{l_m} \right\rangle_c \quad (21)$$

L'équation analogue de (18) s'écrit alors:

$$\frac{1}{m!l_1\dots l_m}T_{l_1,\dots,l_m}=\sum_{\text{surfaces de bords } l_1,\dots,l_m}\frac{1}{\Omega}N^\chi T^{n_k-n_p}t_2^{-n_p}\prod_k(-t_k)^{n_k} \quad (22)$$

où l'on redéfini $\chi = 2 - 2h - m$.

2.3 Matrices aléatoires et théorie conforme.

Dans la partie précédente, nous avons présenté le lien entre matrices aléatoires et surfaces discrétisées. Nous allons maintenant nous intéresser au passage à la limite des surfaces continues et ainsi aborder le lien avec les exposants critiques et la théorie conforme.

2.3.1 Limite continue.

Pour obtenir une surface continue, il faut faire tendre le nombre de pièces formant la surface vers l'infini tout en rendant leur taille infinitésimale. Ces comportements singuliers doivent cependant répondre à certaines contraintes, telles que garder l'aire de la surface (i.e. le nombre de pièces multiplié par leur surface) ainsi que la longueur des bords finies.

Une telle limite est obtenue lorsque l'un des paramètres du potentiel (respectivement plusieurs paramètres) s'approche d'une valeur critique (resp. d'un multiplet de valeurs critiques). On est alors à un point critique (resp. multicritique).

Soit n_k le nombre de polygones à k cotés. En considérant l'expression de \tilde{Z} dans (14), on peut écrire :

$$\langle n_k \rangle = t_k \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial t_k} \quad (23)$$

En un point critique t_{kc} où $\langle n_k \rangle \rightarrow \infty$, la fonction de \tilde{Z} est singulière avec un exposant critique α :

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_{reg} + \tilde{Z}_{sing} \quad (24)$$

où \tilde{Z}_{reg} est régulière et $\tilde{Z}_{sing} \propto (t_k - t_{kc})^\alpha$. Le nombre moyen de polygones à k cotés se comporte alors :

$$\langle n_k \rangle \propto (t_k - t_{kc})^{\alpha-1} \quad (25)$$

Les exposants α sont universels et décrits par la théorie des champs conformes. Leur détermination représente l'un des objectifs principaux des matrices aléatoires appliquées aux théories conformes.

2.3.2 Action d'Einstein-Polyakov.

En théorie des cordes et gravitation quantique, la fonction de partition s'écrit sous la forme ([11]):

$$\tilde{Z} = \sum_{\text{surface S}} d\mathcal{S} e^{-\mathcal{E}(\mathcal{S})} \quad (26)$$

où l'action d'Einstein-Polyakov est définie par :

$$\mathcal{E} = 4\pi G\chi + \Lambda \text{ aire} + \text{matière} \quad (27)$$

G étant la constante gravitationnelle et Λ la constante cosmologique du modèle.

Supposant que les polygones constitutifs de la surface aient des cotés de longueur ϵ , par identification de (27) avec (14), on obtient :

$$\begin{aligned} \ln N &= -4\pi G \\ \Lambda_k \epsilon^2 &= \ln(-t_k) - \frac{k}{2} \ln(t_2) \end{aligned} \quad (28)$$

Dans ces conditions, l'aire peut s'écrire $\mathcal{A} = \langle n_t \rangle \epsilon^2$ où $n_t = \sum n_k$ est le nombre total de polygones constituants la surface. Alors $\langle n_t \rangle$ doit diverger en $\frac{1}{\epsilon^2}$. Ceci nous amène à définir une constante cosmologique renormalisée Λ_{kR} telle que :

$$t_k = t_{kc} - \Lambda_{kR} \epsilon^{-\frac{2}{\alpha-1}} \quad (29)$$

et l'on a l'ordre de grandeur de l'aire moyenne : $\mathcal{A} \propto \alpha \Lambda_{kR}^{\alpha-1}$.

Note : En fait, l'exposant critique α introduit ici, n'est pas bien défini. En effet, un tel exposant, valable pour tous les genres, n'existe pas. On peut seulement définir un exposant α_h pour chaque ordre du développement topologique. Cependant, le passage à la limite continue est toujours possible en procédant ordre par ordre en $\frac{1}{N}$.

2.3.3 Théorie conforme et modèles minimaux.

Il existe très peu de modèles que l'on sache résoudre complètement ([22]): ce sont les modèles minimaux (p, q) dont l'une des caractéristiques principales, la charge centrale c , s'écrit :

$$c = 1 - 6 \frac{(p-q)^2}{pq} \quad \text{avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux.} \quad (30)$$

Les dimensions des champs primaires sont alors les poids conformes de la table de Kac :

$$h_{r,s} = \frac{(rq-sp)^2 - (p-q)^2}{4pq} \quad \text{avec } 0 < r < p \text{ et } 0 < s < q \quad (31)$$

Pour pouvoir comparer les résultats obtenus par les méthodes de matrices aléatoires et de théories conformes, il faut se ramener à des quantités calculables dans les deux cas. Ce seront les exposants critiques. Parmi ceux-ci, les plus couramment utilisés sont les exposants liés à l'aire et à la topologie, c'est à dire le genre h .

On peut, par exemple, considérer le comportement, pour $\mathcal{A} \rightarrow \infty$, de la fonction de partition à aire et genre fixés :

$$Z_h(\mathcal{A}) \sim_{\mathcal{A} \rightarrow \infty} \mathcal{A}^{\gamma_h - 3} \quad (32)$$

Ceci nous permettra de définir la susceptibilité de corde γ_{str} :

$$\gamma_h = 2 - (2 - \gamma_{str})(1 - h) \quad (33)$$

Dans le cas des modèles minimaux, en genre $h = 0$, on peut montrer que l'on a :

$$\gamma_{str} = -2 \frac{|p - q|}{p + q - |p - q|} \quad (34)$$

Remarquons que, les modèles de matrice donnant $\gamma_{str} = -\frac{2}{p+q-1}$, les résultats ne coïncident que pour les modèles unitaires.

On peut également s'intéresser au comportement d'autres opérateurs $\mathcal{O}_{r,s}$ vivant sur la surface :

$$\langle \mathcal{O}_{r,s} \rangle (\mathcal{A}) \sim \mathcal{A}^{1-\Delta_{r,s}} \quad (35)$$

L'exposant $\Delta_{r,s}$ peut être déterminer par les théories conformes si l'opérateur considéré vit à l'intérieur de la surface. Si c'est un opérateur de bord, la méthode des matrices semble être une méthode efficace en l'absence de théorie générale..

2.3.4 Exemple: cas d'une surface à deux bords; le cylindre.

Dans cette partie, nous allons étudier le cas des surfaces à deux bords, découpées selon des carrés, comme exemple d'application. Notons qu'une surface à deux bords n'est rien d'autre qu'un cylindre.

Nous allons donc étudier la fonction génératrice des surfaces à deux bords, l'un de périmètre $L = l\epsilon$ et l'autre $K = k\epsilon$, où ϵ représente la taille du coté d'un triangle :

$$T_{l,k} = \langle \text{Tr} M^l \text{Tr} M^k \rangle_c \quad (36)$$

En utilisant le potentiel quartique symétrique:

$$V(M) = \frac{1}{2}M^2 - \frac{g}{4}M^4 \quad (37)$$

Comme on l'a vu précédemment, le nombre moyen de carrés de coté ϵ est :

$$\langle n \rangle = g \frac{\partial \ln T_{l,k}}{\partial g} \quad (38)$$

Ainsi, l'aire moyenne d'un cylindre de bords de périmètres $L = l\epsilon$ et $L' = l'\epsilon$ sera :

$$\mathcal{A} = \epsilon^2 g \frac{\partial \ln T_{l,l'}}{\partial g} \quad (39)$$

Il faut donc déterminer les fonctions $T_{2l,2k}(g)$. Pour ce faire, considérons maintenant la fonction à deux points, généralisation de la résolvante $\omega(z)$:

$$\omega(x, y) = \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x - M} \text{Tr} \frac{1}{y - M} \right\rangle_c = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T_{l,k}}{x^{l+1} y^{k+1}} \quad (40)$$

Dans la littérature ([18]), on trouve l'expression de $\omega(x, y)$ qui est en fait le noyau de Bergmann (cf le paragraphe qui lui est consacré):

$$\omega(x, y) = -\frac{1}{2(x-y)^2} \left[1 - \frac{xy - a^2}{\sqrt{\sigma(x)\sigma(y)}} \right] \quad (41)$$

où l'on a considéré, profitant de la symétrie du potentiel, que la densité $\rho(x)$ a pour support le segment $[-a, a]$ (c'est ce que l'on appelle le cas à une coupure). On a défini la fonction $\sigma(x) = x^2 - a^2$.

Par étude dimensionnelle, on sait que $T_{k,l} = C_{k,l}a^{k+l}$ où $C_{k,l}$ est un nombre indépendant de g . On a ainsi :

$$\mathcal{A}(L, K) = \epsilon^2(l+k)g \frac{\partial \ln a}{\partial g} \quad (42)$$

On peut par ailleurs ([15]) déterminer $a^2 = \frac{2}{3g} (1 - \sqrt{1 - 12g})$. Ce qui nous donne :

$$\mathcal{A}(L, K) = \epsilon(L+K) \frac{3 \left[4 \frac{1}{\sqrt{1-12g}} - \frac{2}{3} \frac{1-\sqrt{1-12g}}{g} \right]}{2g (1 - \sqrt{1 - 12g})} \quad (43)$$

Le passage à la limite continue nécessite de considérer $\epsilon \rightarrow 0$ tout en gardant L, K et \mathcal{A} finis. Pour cela, on doit se placer au voisinage d'un point critique $g \rightarrow g_c = \frac{1}{12}$ avec $g - g_c \sim \epsilon^2$. Soit alors la constante cosmologique renormalisée $\Lambda = \frac{1}{L_0^2}$, telle que :

$$g = \frac{1}{12} (1 - \Lambda \epsilon^2) \quad (44)$$

On obtient alors :

$$\mathcal{A}(L, K) = 36(L+K)L_0 + O(\epsilon) \quad (45)$$

Notons que ce résultat correspond à celui d'un cylindre de hauteur L_0 , ce qui nous renseigne sur la forme de la surface.

3 Le modèle à deux matrices.

3.1 Introduction du modèle.

Ce modèle est une extension du modèle à une matrice dans le sens où l'on considère maintenant deux matrices hermitiennes M_1 et M_2 de taille $N \times N$, ainsi que l'intégrale :

$$Z = \int dM_1 dM_2 e^{-N\text{Tr}(V_1(M_1) + V_2(M_2) - cM_1 M_2)} \quad (46)$$

avec V_1 et V_2 deux potentiels polynomiaux définis de manière analogue au V précédent.

Tout d'abord, on peut remarquer que l'intégrale est modifiée de façon triviale par changement de variable affine sur les matrices. Ainsi, on peut se placer dans le cas où les coefficients des termes quadratiques de V_1 et V_2 sont tous deux égaux à $\frac{1}{2}$.

Dès lors, une interprétation sous forme de diagramme peut être introduite comme dans le cas du modèle à une matrice, en prenant soin toutefois de différencier les deux matrices. On peut associer deux couleurs différentes aux deux matrices, bleu pour M_1 et rouge pour M_2 . Les diagrammes de Feynman seront alors légèrement plus compliqués.

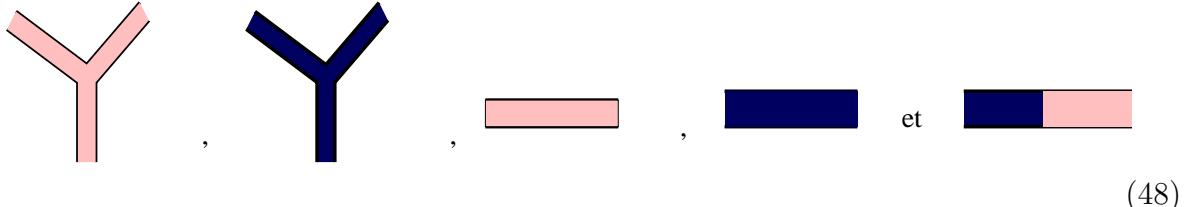
Ils feront ainsi apparaître trois types de propagateurs différents : l'un tout rouge correspondant au lien M_2-M_2 , l'autre tout bleu pour le lien M_1-M_1 et enfin un propagateur mixte avec un côté bleu et un côté rouge pour représenter le lien entre M_1 et M_2 . Notons que le poids de ce troisième propagateur est égal à celui d'un propagateur unicolore multiplié par c . Par contre, les vertex resteront quant à eux unicolores, aucun terme de la forme $M_1^a M_2^b$ avec le produit $ab > 1$ n'apparaissant dans l'action.

3.2 Potentiel cubique et modèle d'Ising.

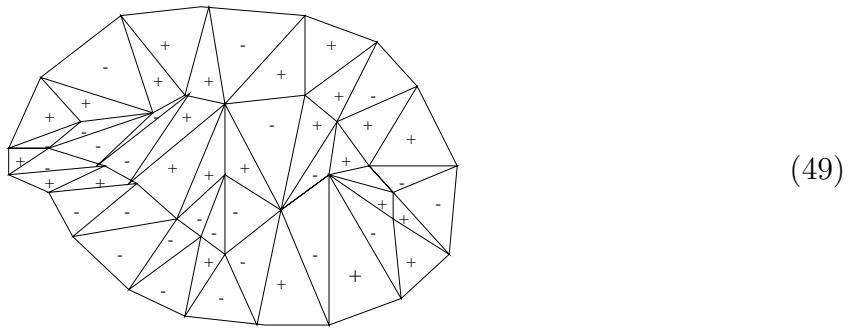
Considérons le cas où les deux potentiels sont cubiques. C'est à dire, (46) s'écrit :

$$Z = \int dM_1 dM_2 e^{-NT r\left(\frac{g_1}{3}M_1^3 + \frac{g_2}{2}M_2^3 + \frac{1}{2}M_1^2 + \frac{1}{2}M_2^2 - cM_1 M_2\right)} \quad (47)$$

Les diagrammes de Feynman sont alors constitués de deux vertex à trois pattes, l'un bleu et l'autre rouge, et des trois propagateurs définis précédemment :



Le passage aux surfaces duales ne fait plus alors apparaître de simples surfaces triangulées, mais des surfaces composées de deux types de triangles : les uns rouges et les autres bleus. On peut représenter ces différentes couleurs en attribuant par exemple un spin +1 aux triangles rouges et un spin -1 aux triangles bleus. On identifie alors le modèle à deux matrices à l'étude de surfaces triangulées sur lesquels sont disposés des spins + et -.



On note ainsi l'analogie avec le modèle d'Ising. Il reste à définir le lien entre les paramètres de ces deux modèles ([27], [6], [8], [28]).

Pour cela, il suffit d'identifier le poids associé à un diagramme dans chacun des deux modèles.

- Pour le modèle de matrices: un diagramme à n_σ triangles de spin σ , n_{+-} propagateurs liant deux triangles de spins différents et $n_p = \frac{3}{2}(n_+ + n_-)$ propagateurs en tout aura pour poids :

$$N^\chi \frac{1}{\Omega} g_1^{n_+} g_2^{n_-} c^{n_{+-}} (1 - c^2)^{-n_p} \quad (50)$$

- Pour un modèle d'Ising avec une constante cosmologique g , une constante gravitationnelle N , un nombre total de triangle n , un champ magnétique h et une température J :

$$N^\chi \frac{1}{\Omega} g^n e^{-J \sum \sigma_i \sigma_j} e^{-h \sum \sigma_i} \quad (51)$$

En remarquant que $2n_{+-} = n_p - \sum \sigma_i \sigma_j$, on peut identifier:

$$\begin{aligned} g &= \sqrt{g_1 g_2} \left(\frac{\sqrt{c}}{1-c^2} \right)^{\frac{3}{2}} \\ e^{-2h} &= \frac{g_1}{g_2} \\ E^{2J} &= c \end{aligned} \quad (52)$$

3.3 Méthode des équations de boucles et applications.

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à une méthode de calcul permettant en partie de résoudre le modèle à 2 matrices : la méthode des boucles ([32], [19], [11], [1]), qui n'est autre que la méthode de Schwinger-Dyson dans le cadre des matrices aléatoires. Dans un premier temps, nous aborderons cette méthode d'un point de vue théorique avant de l'appliquer au calcul de la fonction $\langle \text{Tr} \frac{1}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} \text{Tr} \frac{1}{x'-M_1} \frac{1}{y'-M_2} \rangle_c$ que j'ai effectué au cours de ce stage.

3.4 Méthode des équations de boucles.

Considérons deux potentiels polynomiaux V_1 et V_2 définis par :

$$V_1(x) = \sum_{k=0}^{d_1} \frac{g_{k+1}}{k+1} x^{k+1} \quad \text{et} \quad V_2(y) = \sum_{k=0}^{d_2} \frac{\tilde{g}_{k+1}}{k+1} y^{k+1} \quad (53)$$

La méthode des équations de boucles consiste simplement à effectuer un changement de variable infinitésimal de la forme :

$$M_i \rightarrow \tilde{M}_i = M_i + \epsilon f(M_1, M_2) \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (54)$$

dans les intégrales de matrice. **Notons que $f(M_1, M_2)$ doit être hermitienne pour que \tilde{M}_i le soit aussi.** On va simplement écrire l'invariance à l'ordre 1 en ϵ de la fonction de partition Z (on considère ici le cas $i = 1$, l'autre cas étant totalement analogue) :

$$\begin{aligned} Z &= \int dM_1 dM_2 e^{-N \text{Tr}(V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2)} \\ &= \int d\tilde{M}_1 dM_2 e^{-N \text{Tr}(\tilde{V}_1(\tilde{M}_1) + V_2(M_2) - \tilde{M}_1 M_2)} \end{aligned}$$

$$= \int dM_1 dM_2 (1 + \epsilon J(M_1, M_2)) e^{-NTr(V_1(\tilde{M}_1) + V_2(M_2) - \tilde{M}_1 M_2)} (1 - \epsilon K(M_1, M_2)) + O(\epsilon^2) \quad (55)$$

où $J(M_1, M_2)$ et $K(M_1, M_2)$ correspondent à l'ordre 1 en ϵ respectivement du jacobien du changement de variable et de la variation de l'action. C'est à dire :

$$\begin{aligned} \det \frac{\partial \tilde{M}_1}{\partial M_1} &= 1 + \epsilon J(M_1, M_2) + O(\epsilon^2) \\ NTr(V_1(\tilde{M}_1) + V_2(M_2) - \tilde{M}_1 M_2) &= NTr(V_1(M_1) + V_2(M_2) - M_1 M_2) \\ &\quad + \epsilon K(M_1, M_2) + O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (56)$$

On obtient ainsi l'équation de boucle générique :

$$\langle J(M_1, M_2) \rangle = \langle K(M_1, M_2) \rangle \quad (57)$$

3.4.1 Détermination de $J(M_1, M_2)$ et de $K(M_1, M_2)$.

- La variation de l'action par ce changement de variable donne aisément l'expression :

$$K(M_1, M_2) = N \{ Tr[V'_1(M_1)f(M_1, M_2) - M_2 f(M_1, M_2)] \} \quad (58)$$

- La détermination de $J(M_1, M_2)$ est quant à elle moins évidente, mais peut heureusement être résumée par deux règles simples, connues sous le nom de règles "split" et "merge" ([14]). Celles-ci correspondent en fait aux deux types de changement de variable effectués en pratique.

Règle Split.

Le premier type de changement de variable usuel correspond à $f(M_1, M_2) = A \frac{1}{x - M_1} B$ où A et B sont des fonctions de M_1 et M_2 . Alors la correction issue du Jacobien est :

$$\begin{aligned} J(M_1, M_2) &= Tr\left(A \frac{1}{x - M_1}\right) Tr\left(\frac{1}{x - M_1} B\right) \\ &\quad + \text{contributions venant de } A(M_1) \text{ et } B(M_1). \end{aligned} \quad (59)$$

Ainsi, chaque fois que l'on rencontre un terme $\frac{1}{x - M_1}$ en dehors d'une trace, on "coupe" l'expression en deux traces en introduisant un facteur $\frac{1}{x - M_1}$ dans chaque trace.

Règle merge.

On rencontre également des changements de variable du type

$$f(M_1, M_2) = A Tr\left(\frac{1}{x - M_1} B\right). \text{ On a alors :}$$

$$J(M_1, M_2) = Tr\left(A \frac{1}{x - M_1} B \frac{1}{x - M_1}\right)$$

$$+ \text{contributions venant de } A(M_1) \text{ et } B(M_1). \quad (60)$$

C'est à dire que, chaque fois que l'on rencontre un terme $\frac{1}{x-M_1}$ dans une trace, on regroupe toute l'expression à l'intérieur d'une même trace en remplaçant "Tr" par un duplicata du facteur $\frac{1}{x-M_1}$.

3.4.2 Quelques définitions.

Les équations de boucles faisant intervenir de nombreuses expressions fastidieuses à écrire, il est nécessaire d'introduire quelques notations pour que ce rapport soit lisible. Nous considérerons donc les fonctions suivantes :

$$W(x) = \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x-M_1} \right\rangle \text{ et } \tilde{W}(y) = \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{y-M_2} \right\rangle \quad (61)$$

$$W(x, y) = \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} \right\rangle \text{ et } P(x, y) = \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{V'_1(x) - V'_1(M_1)}{x-M_1} \frac{V'_2(y) - V'_2(M_2)}{y-M_2} \right\rangle \quad (62)$$

$$U(x, y) = \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x-M_1} \frac{V'_2(y) - V'_2(M_2)}{y-M_2} \right\rangle \text{ et } \tilde{U}(x, y) = \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{V'_1(x) - V'_1(M_1)}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} \right\rangle \quad (63)$$

$$W(x, y; x') = \frac{1}{N^2} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} \text{Tr} \frac{1}{x'-M_1} \right\rangle \quad (64)$$

$$U(x, y; x') = \frac{1}{N^2} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x-M_1} \frac{V'_2(y) - V'_2(M_2)}{y-M_2} \text{Tr} \frac{1}{x'-M_1} \right\rangle \quad (65)$$

$$\tilde{L}(x, y; y') = \frac{1}{N^2} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} \text{Tr} \frac{1}{y'-M_2} V'_1(M_1) \right\rangle \quad (66)$$

$$P(x, y; x', y') = \frac{1}{N^2} \left\langle \text{Tr} \frac{V'_1(x) - V'_1(M_1)}{x-M_1} \frac{V'_2(y) - V'_2(M_2)}{y-M_2} \text{Tr} \frac{1}{x'-M_1} \frac{1}{y'-M_2} \right\rangle \quad (67)$$

$$\begin{aligned} H(x, y, x', y') = & \frac{1}{2N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} \frac{1}{x'-M_1} \frac{1}{y'-M_2} \right\rangle \\ & + \frac{1}{2N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x-M_1} \frac{1}{y'-M_2} \frac{1}{x'-M_1} \frac{1}{y-M_2} \right\rangle \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} F(x, y, x', y') = & \frac{1}{2N} \left\langle \text{Tr} \frac{V'_1(x) - V'_1(M_1)}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} \frac{1}{x'-M_1} \frac{1}{y'-M_2} \right\rangle \\ & + \frac{1}{2N} \left\langle \text{Tr} \frac{V'_1(x) - V'_1(M_1)}{x-M_1} \frac{1}{y'-M_2} \frac{1}{x'-M_1} \frac{1}{y-M_2} \right\rangle \end{aligned} \quad (69)$$

$$W(x, y; x', y') = \frac{1}{N^2} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} \text{Tr} \frac{1}{x'-M_1} \frac{1}{y'-M_2} \right\rangle \quad (70)$$

$$\tilde{U}(x, y; x', y') = \frac{1}{N^2} \left\langle \text{Tr} \frac{V'_1(x) - V'_1(M_1)}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} \text{Tr} \frac{1}{x'-M_1} \frac{1}{y'-M_2} \right\rangle \quad (71)$$

Nous aurons également besoin de deux fonctions fondamentales :

$$X(y) = V'_2(y) - \tilde{W}(y) \text{ et } Y(x) = V'_1(x) - W(x) \quad (72)$$

3.4.3 L'équation de boucle maîtresse.

Parmis les nombreuses équations de boucles que l'on peut former, l'une a une signification particulière et on l'appelle "master loop equation" ([32], [19]).

Considérons le changement de variable :

$$M_2 \rightarrow M_2 + \epsilon \frac{1}{x - M_1} \quad (73)$$

L'équation de boucle associée est alors simplement :

$$xW(x) - 1 = \frac{1}{N} \left\langle \text{Tr} \frac{1}{x - M_1} V'_2(M_2) \right\rangle \quad (74)$$

Le changement de variable (hermitien bien sûr) :

$$M_1 \rightarrow M_1 + \epsilon \left(\frac{1}{x - M_1} \frac{V'_2(y) - V'_2(M_2)}{y - M_2} + \frac{V'_2(y) - V'_2(M_2)}{y - M_2} \frac{1}{x - M_1} \right) \quad (75)$$

donne, en utilisant (74), l'équation de boucle :

$$(y - Y(x))U(x, y) = V'_2(y)W(x) - P(x, y) - xW(x) + 1 - \frac{1}{N^2}U(x, y; x) \quad (76)$$

$U(x, y)$ étant un polynôme en y , il n'a pas de singularité pour y fini, et l'équation (76) prise en $y = Y(x)$ s'écrit :

$$\begin{cases} y = Y(x) \\ (V'_2(y) - x)(V'_1(x) - y) - P(x, y) + 1 = \frac{1}{N^2}U(x, y; x) \end{cases} \quad (77)$$

En notant le polynôme de degrés $(d_1 + 1)$ en x et $(d_2 + 1)$ en y :

$$E(x, y) = (V'_2(y) - x)(V'_1(x) - y) - P(x, y) + 1 \quad (78)$$

on peut réécrire l'équation précédente en :

$$E(x, Y(x)) = \frac{1}{N^2}U(x, Y(x); x) \quad (79)$$

qui est appelée équation de boucle maîtresse.

Cette équation est fondamentale car elle permet de déterminer la fonction $Y(x)$ et ainsi, donne accès à toutes les fonctions génératrices de surfaces aléatoires.

Remarques:

- En échangeant les indices $1 \leftrightarrow 2$ dans tout le paragraphe précédent, on aurait obtenu une équation analogue à (79):

$$E(X(y), y) = \frac{1}{N^2}\tilde{U}(X(y), y; y) \quad (80)$$

- A l'ordre 0 en ϵ , les équations (79) et (80) nous donnent :

$$\begin{cases} E(x, Y(x)) = 0 \\ E(X(y), y) = 0 \end{cases} \quad (81)$$

Les zéros de $E(x,y)$ respectivement en x et y seront alors notés $X_0(y), X_1(y), \dots, X_{d_1}(y)$ et $Y_0(x), Y_1(x), \dots, Y_{d_2}(x)$. D'où :

$$E(x, y) = -g_{d_1+1} \prod_{i=0}^{d_1} (x - X_i(y)) = -\tilde{g}_{d_2+1} \prod_{i=0}^{d_2} (y - Y_i(x)) \quad (82)$$

- $E(x,y) = 0$ défini une courbe algébrique. On voit ainsi apparaître, pour la première fois le lien entre modèles de matrices et géométrie algébrique.

3.5 Interprétation des traces et opérateurs de bord.

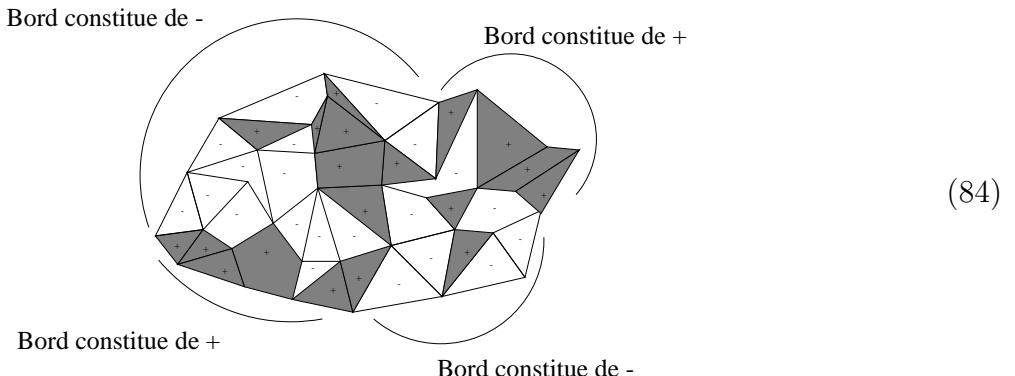
Comme nous l'avons vu plus haut, dans le modèle à une matrice, les surfaces à k bords sont représentées par les termes de la forme $\left\langle \left(\text{Tr} \frac{1}{x-M} \right)^k \right\rangle_c$.

Nous allons maintenant nous intéresser à la généralisation de cette interprétation dans le modèle à deux matrices. En effet, ce cas est bien plus complexe : du fait de la présence de deux matrices, on peut observer deux types de traces; certaines dites mixtes font apparaître à la fois les matrices M_1 et M_2 à l'intérieur d'une même trace, les autres étant dites non mixtes.

Il existe cependant une procédure simple pour interpréter les termes de la forme :

$$\left\langle \left(\text{Tr} \frac{1}{x-M_1} \right)^{n_+} \left(\text{Tr} \frac{1}{y-M_2} \right)^{n_-} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\text{Tr} \left(\frac{1}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} \right)^k \right]^{n_k} \right\rangle_c \quad (83)$$

Les exposants introduits ici caractérisent les surfaces intervenant dans le développement topologique. Ainsi, on pourrait montrer que : n_+ est le nombre de bords entièrement constitués de segments +; n_- est le nombre de bords entièrement constitués de segments -; $n_t = n_+ + n_- + \sum_k n_k$ est le nombre total de bords; n_k est le nombre de bords constitués de la succession de k groupes de segments + contigus séparés par k groupes de segments - contigus. Par exemple pour $n_+ = 0$, $n_- = 0$ et $n_2 = 1$:



Ainsi, le nombre de traces indique le nombre de bords tandis qu'à l'intérieur de chaque trace, le nombre de facteur $\frac{1}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2}$ indique la moitié du nombre d'opérateurs de bords, i.e. la moitié du nombre de fois où le bord change de couleur.

3.6 Derniers outils nécessaires au calcul: le noyau de Bergmann et les opérateurs d'insertion de boucle.

3.6.1 Les opérateurs d'insertion de boucles.

On peut se demander comment passer d'une fonction à une boucle composée de $+$, $W(x)$, à une fonction à deux boucles $+$, $\Omega(x; x') = \langle Tr \frac{1}{x-M_1} Tr \frac{1}{x'-M_1} \rangle$. De manière générale, on aimerait trouver un opérateur qui insère une boucle (de type $+$ ou $-$) dans la surface considérée.

De tels opérateurs existent ([1], [2]). Considérons les dérivations par rapport à $V_1(x)$ et $V_2(y)$ définies formellement par :

$$\frac{\partial}{\partial V_1(x)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x^{k+1}} \frac{\partial}{\partial g_k} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial V_2(y)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{y^{k+1}} \frac{\partial}{\partial \tilde{g}_k} \quad (85)$$

On peut alors remarquer que $\Omega(x; x') = \frac{\partial W(x)}{\partial V_1(x')}$. On pourrait également vérifier que la dérivation par rapport à $V_1(x)$ appliquée sur un terme de la forme (83) a pour effet d'augmenter n_+ d'une unité. De même, la dérivation par rapport à $V_2(y)$ augmente n_- de 1. Ainsi, ces opérateurs ont pour résultat l'insertion d'un bord (ou boucle) composé respectivement uniquement de $+$ ou uniquement de $-$. Pour cela on les appelle opérateurs d'insertion de boucle.

3.6.2 Le noyau de Bergmann.

Considérons à nouveau la fonction à deux boucles $\Omega(x; x')$. Elle peut s'écrire:

$$\Omega(x; x') = \frac{\partial W(x)}{\partial V_1(x')} = - \frac{1}{(x - x')^2} - \frac{\partial Y(x)}{\partial V_1(x')} \quad (86)$$

Pour étudier le second terme du membre de droite, plaçons nous sur la surface de Riemann définie par notre courbe algébrique $\mathcal{E} = \{(x, y) | E(x, y) = 0\}$. Un point p de \mathcal{E} est alors un couple de complexes $p = (\mathcal{X}(p), \mathcal{Y}(p))$ tels que $E(\mathcal{X}(p), \mathcal{Y}(p)) = 0$.

Notons qu'à chaque x (resp. y) correspondent $d_2 + 1$ (resp. $d_1 + 1$) points de \mathcal{E} :

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(p) = x &\Leftrightarrow p = p_k(x) \quad \text{pour } k \text{ allant de } 0 \text{ à } d_2. \\ \mathcal{Y}(q) = y &\Leftrightarrow q = q_k(x) \quad \text{pour } k \text{ allant de } 0 \text{ à } d_1. \end{aligned} \quad (87)$$

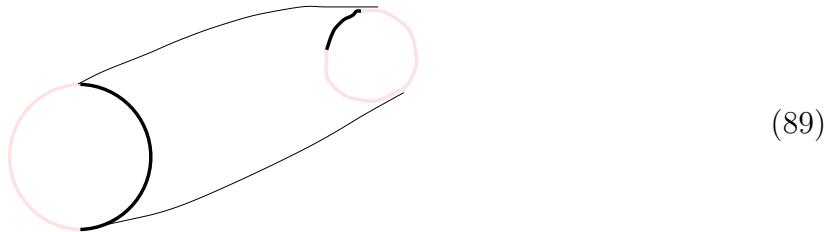
Dès lors, on peut définir la fonction sur la surface de Riemann :

$$\frac{B(p, p')}{d\mathcal{X}(p)d\mathcal{X}(p')} = - \left. \frac{\partial \mathcal{Y}(p)}{\partial V_1(\mathcal{X}(p'))} \right|_{\mathcal{X}(p)=cte} \quad (88)$$

Cette fonction a un seul pôle double en $p=p'$ avec résidu nul sur la surface de Riemann : c'est le noyau de Bergmann ([20], [21]), qui s'appelle fonction de Weierstrass en genre 1.

4 Application au cas d'un cylindre à bords bicolores; Calcul de $\langle \text{Tr} \frac{1}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} \text{Tr} \frac{1}{x'-M_1} \frac{1}{y'-M_2} \rangle_c$.

Dans cette partie, je vais présenter ce qui fut l'essentiel de mon travail de recherche au cours de ce stage, c'est à dire le calcul de $W(x,y;x',y')$. Celui-ci permettra par la suite d'avoir des résultats relatifs aux cylindres dont chaque bords est composé de deux segments de couleur différente.



On pourra ainsi passer à la limite conforme pour obtenir des informations sur les exposants critiques en présence d'opérateurs de bords.

Pour effectuer ce calcul, nous allons procéder par étapes:

- Détermination d'un système d'équations de boucles faisant intervenir $W(x,y;x',y')$;
- Résolution de ce système en commençant par les inconnues dont les propriétés polynomiales rendent le calcul plus simple;
- Simplification de l'expression de $W(x,y;x',y')$ trouvée.

4.1 Les équations de boucles.

Dans cette partie, nous allons déterminer deux équations de boucles dont les seules fonctions inconnues sont $W(x,y;x',y')$, $\tilde{U}(x,y;x',y')$ et $P(x,y;x',y')$, les autres moments intervenant ayant déjà été calculés dans la littérature.

Notons que ces équations ne peuvent pas s'écrire directement en appliquant la méthode des boucles présentée plus haut. En effet, si usuellement seuls les termes dominants (de plus haut degré en N) s'annulent grâce à une équation de boucle d'ordre inférieure, ici des termes sous-dominants disparaissent également car ils interviennent dans cette équation d'ordre inférieur. Ainsi, je préciserais pour chaque équation le changement de variable principal et celui permettant d'éliminer les termes dominants et certains sous-dominants.

La première équation est obtenue en considérant le changement de variable:

$$\delta M_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} + \frac{1}{y-M_2} \frac{1}{x-M_1} \right] \text{Tr} \frac{1}{x'-M_1} \frac{1}{y'-M_2} \quad (90)$$

L'équation de boucle associée à $\delta M_1 = \frac{1}{x-M_1} \frac{1}{y-M_2} + h.c.$, nous permet d'écrire à l'ordre sous dominant :

$$(Y(x) - y)W(x,y;x',y') - \tilde{U}(x,y';x',y') = W(x',y';x)(W(x,y) - 1)$$

$$+ \frac{1}{x - x'} [H(x', y, x', y') - H(x, y, x', y')] \quad (91)$$

D'autre part, les changements de variables

$$\delta M_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{V'_1(x) - V'_1(M_1)}{x - M_1} \frac{1}{y - M_2} + \frac{1}{y - M_2} \frac{V'_1(x) - V'_1(M_1)}{x - M_1} \right] \text{Tr} \frac{1}{x' - M_1} \frac{1}{y' - M_2} \quad (92)$$

et $\partial M_2 = \frac{V'(x) - V'(M_1)}{x - M_1} \frac{1}{y - M_2} + h.c.$, donnent :

$$\begin{aligned} (X(y) - x) \tilde{U}(x, y; x', y') - P(x, y; x', y') &= \tilde{L}(x', y'; y) + [\tilde{U}(x, y) - V'_1(x)] W(x', y'; y) \\ &\quad + \frac{1}{y - y'} [F(x, y', x', y') - F(x, y, x', y')] \end{aligned} \quad (93)$$

4.2 Résolution des équations.

Nous allons maintenant résoudre ces équations en utilisant le fait que $P(x, y; x', y')$ est un polynôme en x et y .

Tout d'abord, une autre équation de boucle donnant :

$$\tilde{L}(x', y'; y) = y W(x', y'; y) + H(x', y, x', y') \quad (94)$$

et les résultats $\tilde{U}(x, y) - V'_1(x) + y = \frac{E(x, y)}{x - X}$ et $W(x, y) = 1 - \frac{E(x, y)}{(x - X)(y - Y)}$ étant connus ([16]' [17]), on peut simplifier (93) en :

$$\begin{aligned} (X(y) - x) \tilde{U}(x, y; x', y') - P(x, y; x', y') &= \frac{E(x, y)}{x - X} W(x', y'; y) \\ &\quad + H(x', y, x', y') + \frac{1}{y - y'} [F(x, y', x', y') - F(x, y, x', y')] \end{aligned} \quad (95)$$

Les différents termes du membre de droite peuvent être calculés à partir de résultats préexistants ([16]) :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = \frac{E(x, y)}{x - X} W(x', y'; y) &= \frac{E(x, y) E(x', y')}{(x - X)(y' - Y')(x' - X')} \\ &\quad * \left[\sum_{k=1}^{d_1} \frac{\partial X_k(y')}{\partial V_2(y)} \frac{1}{x' - X'_k} - \frac{\partial Y(x')}{\partial V_2(y)} \frac{1}{y' - Y'} \right] \end{aligned} \quad (96)$$

et

$$\mathcal{C} = H(x', y, x', y') + \frac{1}{y - y'} [F(x, y', x', y') - F(x, y, x', y')] =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(y-y')(x'-X')(y'-Y')} \left[\frac{E(x',y)E_x(x',y') - E_x(x',y)E(x',y')}{(x'-X)(y-Y')} \right. \\
& + \frac{E(x',y')E_y(x,y') - E_y(x',y')E(x,y')}{(x-X')(x-x')} \left. \right] \\
& + \frac{E(x',y)E(x',y')}{(x'-X')(y-Y')(y'-Y')} \left[\frac{Y'_x}{(x'-X)(y-Y')(y'-Y')} \right. \\
& + \frac{X-X'}{(x'-X)^2(x'-X')(y-y')} + \frac{1}{(x-x')(y-y')(x'-X)} \left. \right] \\
& + \frac{E(x',y')E(x',y')}{(y-y')(x-X')(x'-X')(y'-Y')} \left[\frac{1}{(x-x')(y'-Y')} - \frac{X'_y}{(x-X')(x'-X')} \right. \\
& - \frac{E(x',y')^2}{E(x,y)E(x',y')} \left. \right] \\
& - \frac{(x-x')(y-y')(x'-X')^2(y'-Y')^2}{E(x',y)E(x,y')} - \frac{(x-x')(y-y')^2(x-X)(x'-X')(y'-Y')}{(x-x')(y-y')^2(x-X')(x'-X)(y-Y')} \\
& + \frac{(x-x')(y-y')^2(x-X')(x'-X)(y-Y')}{(x-x')(y-y')^2(x-X')(x'-X)(y-Y')} \tag{97}
\end{aligned}$$

Notons que $\tilde{U}(x, y; x', y')$ est un polynôme en x . Ses pôles en y ne dépendent donc pas de x . Alors $(X(y)-x)\tilde{U}(x, y; x', y')$ s'annule pour tout $y = Y_i(x)$. D'autre part, $P(x, y; x', y')$ est un polynôme en x et y de degré $d_2 - 1$ en y . Il est donc entièrement déterminé par sa valeur en d_2 points, par exemple les $Y_i(x)$ pour $i = 1..d_2$.

Remarquant que $\frac{E(x,y)}{x-X} \Big|_{y=Y_i} = E_x(x, Y_i)$, la formule d'interpolation prise pour les $y = Y_i(x)$ donne :

$$-P(x, y; x', y') = -\sum_{i=1}^{d_2} \frac{P(x, Y_i; x', y')(Y_i - Y)}{(y - Y_i)(y - Y)} \frac{E(x, y)}{E_y(x, Y_i)} \tag{98}$$

Soit, sachant que $X'_y = -\frac{E_y(X', y')}{E_x(X', y')}$ et $Y'_x = -\frac{E_x(x', Y')}{E_y(x', Y')}$

$$\begin{aligned}
-P(x, y; x', y') &= \sum_{i=1}^{d_2} \frac{E_x(x, Y_i)}{E_y(x, Y_i)} \frac{E(x, y)E(x', y')(Y_i - Y)}{(y - Y_i)(y - Y)(x' - X')(y' - Y')} \\
&\quad * \left[\sum_{k=1}^{d_1} \frac{\partial X'_k}{\partial V_2(Y_i)} \frac{1}{x' - X'_k} - \frac{\partial Y'}{\partial V_2(Y_i)} \frac{1}{y' - Y'} \right] \\
&\quad + \frac{(Y_i - Y)E(x, y)}{(x - x')(Y_i - y')(x' - X')(y' - Y')(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)} \\
&\quad * \left[\frac{E(x', y')E_x(x', Y_i) - E_x(x', y')E(x', Y_i)}{(Y_i - Y')} + \frac{E(x', y')E_y(x, y') - E_y(x', y')E(x, y')}{(x - X')} \right] \\
&\quad - \frac{(Y_i - Y)E(x', Y_i)E(x, y)E(x', y')}{(x - x')(x' - X')(Y_i - Y')(y' - Y')(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)} \\
&\quad * \left[\frac{Y'_x}{(Y_i - Y')(y' - Y')} - \frac{x - X'}{(x - x')(x' - X')(Y_i - y')} + \frac{1}{(x - x')(Y_i - y')} \right] \\
&\quad + \frac{(Y_i - Y)E(x, y)E(x', y')E(x', y')}{(Y_i - y')(x - X')(x' - X')(y' - Y')(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)} \\
&\quad * \left[\frac{1}{(x - x')(y' - Y')} - \frac{X'_y}{(x - X')(x' - X')} \right] \\
&\quad - \frac{(Y_i - Y)E(x, y)E(x', y')^2}{(x - x')(Y_i - y')(x' - X')^2(y' - Y')^2(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)} \\
&\quad - \frac{(Y_i - Y)E(x, y)E(x', y')E_x(x, Y_i)}{(x - x')(Y_i - y')^2(x' - X')(y' - Y')(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)} \\
&\quad - \frac{(x - x')(Y_i - y')^2(x' - X')(y' - Y')(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)}{(x - x')(Y_i - y')^2(x' - X')(y' - Y')(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)}
\end{aligned}$$

$$-\frac{(Y_i - Y)E(x, y)E(x', Y_i)E(x, y')}{(x - x')^2(y - y')^2(x - X')(Y_i - Y')(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)} \quad (99)$$

Nous pouvons alors exprimer $W(x, y; x', y')$ en fonction de $P(x, y; x', y')$ en éliminant $\tilde{U}(x, y; x', y')$ dans (91) et (95) :

$$\begin{aligned} (Y - y)W(x, y; x', y') &= \frac{P(x, y; x', y')}{X - x} \\ &\quad - \frac{E(x, y)}{x - X} \left(\frac{W(x', y'; y)}{x - X} + \frac{W(x', y'; x)}{y - Y} \right) \\ &\quad + \frac{1}{x - x'} [H(x', y, x', y') - H(x, y, x', y')] \\ &\quad + \frac{H(x', y, x', y')}{X - x} \\ &\quad + \frac{1}{(y - y')(X - x)} [F(x, y', x', y') - F(x, y, x', y')] \end{aligned} \quad (100)$$

Utilisant les expressions de $H(x, y; x', y')$ et $F(x, y; x', y')$ établies dans [16] où l'on fera tendre x vers x' et y vers y' ainsi que $W(x', y'; x) = \frac{\partial W(x', y')}{\partial V_1(x)}$ et $W(x', y'; y) = \frac{\partial W(x', y')}{\partial V_2(y)}$, on obtient finalement l'expression de $W(x, y; x', y')$:

$$\begin{aligned} (Y - y)W(x, y; x', y') &= \\ &\frac{E(x, y)E(x', y')}{(x - X)(x' - X')(y' - Y')} \left\{ \sum_{k=1}^{d_1} \frac{1}{x' - X'_k} \left[-\frac{1}{x - X} \frac{\partial X'_k}{\partial V_2(y)} - \frac{1}{y - Y} \frac{\partial X'_k}{\partial V_1(x)} \right] \right. \\ &+ \sum_{i=1}^{d_2} \frac{E_x(x, Y_i)}{E_y(x, Y_i)} \frac{(Y_i - Y)}{(y - Y_i)(y - Y)} \left[\sum_{k=1}^{d_1} \frac{\partial X'_k}{\partial V_2(Y_i)} \frac{1}{x' - X'_k} - \frac{\partial Y'}{\partial V_2(Y_i)} \frac{1}{y' - Y'} \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{y' - Y'} \left[-\frac{1}{x - X} \frac{\partial Y'}{\partial V_2(y)} - \frac{1}{y - Y} \frac{\partial Y'}{\partial V_1(x)} \right] \right] \right\} \\ &+ \frac{E(x, y)E(x', y')}{(x - x')(y - y')(x - X)(x' - X')(y' - Y')} \left[\frac{1}{(x - x')(y - Y)} + \frac{1}{(y - y')(x - X)} \right] \\ &- \frac{E(x, y')E(x', y')}{(y - y')(x - X)(x - X')(x' - X')(y' - Y')} \left[\frac{1}{(x - x')(y' - Y')} - \frac{X'_y}{(x - X')(x' - X')} \right] \\ &- \frac{E(x', y)E(x', y')}{(x - x')(x - X)(x' - X')(y - Y')(y' - Y')} \left[\frac{1}{(y - y')(x' - X')} - \frac{Y'_x}{(y - Y')(y' - Y')} \right] \\ &- \frac{E(x', y)E(x, y')}{(x - x')(y - y')(x - X)(x' - X)(y - Y')} \left[\frac{1}{(y - y')(x - X)} + \frac{1}{(x - x')(y' - Y)} \right] \\ &\quad + \frac{E(x', y')^2}{(x - x')(y - y')(x - X)(x' - X)^2(y' - Y')^2} \\ &+ \frac{E(x', y)E_x(x', y') - E_x(x', y)E(x', y')}{(x - x')(y - y')(y - Y')(x - X)(x' - X')(y' - Y')} - \frac{E(x', y')E_y(x, y') - E_y(x', y')E(x, y')}{(x - x')(y - y')(x - X)(x - X')(x' - X')(y' - Y')} \\ &\quad + \frac{1}{x - X} \sum_{i=1}^{d_2} \left\{ \frac{(Y_i - Y)E(x, y)}{(x - x')(Y_i - y')(x' - X')(y' - Y')(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)} \right. \\ &\quad \left. * \left[\frac{E(x', y')E_x(x', Y_i) - E_x(x', y')E(x', Y_i)}{(Y_i - Y')} + \frac{E(x', y')E_y(x, y') - E_y(x', y')E(x, y')}{(x - X')} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{(Y_i - Y)E(x', Y_i)E(x, y)E(x', y')}{(x - x')(x' - X')(Y_i - Y')(y' - Y')(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)} \right. \\ &\quad \left. * \left[\frac{Y'_x}{(Y_i - Y')(y' - Y')} - \frac{x - X'}{(x - x')(x' - X')(Y_i - y')} + \frac{1}{(x - x')(Y_i - y')} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(Y_i - Y)E(x,y)E(x,y')E(x',y')}{(Y_i - y')(x - X')(x' - X')(y' - Y')(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)} \left[\frac{1}{(x - x')(y' - Y')} - \frac{X'_y}{(x - X')(x' - X')} \right] \\
& - \frac{(Y_i - Y)E(x,y)E(x',y')^2}{(x - x')(Y_i - y')(x' - X')^2(y' - Y')^2(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)} \\
& - \frac{(Y_i - Y)E(x,y)E(x',y')E_x(x, Y_i)}{(x - x')(Y_i - y')^2(x' - X')(y' - Y')(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)} \\
& - \frac{(Y_i - Y)E(x,y)E(x',Y_i)E(x,y')}{(x - x')^2(y - y')^2(x - X')(Y_i - Y')(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)} \}
\end{aligned} \tag{101}$$

4.3 Simplification de l'expression de $W(x,y;x',y')$.

L'expression obtenue plus haut permet un passage à la limite conforme. Cependant, du fait des nombreuses sommes sur les Y_i , elle n'est pas tout à fait satisfaisante. On voudrait, en effet, trouver une expression qui montre que $W(x,y;x',y')$ est une fonction définie sur \mathcal{E} . Pour cela, il faut que cette dernière soit symétrique en les Y_i . Nous allons donc la simplifier.

Tout d'abord, on peut noter que :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d_2} \frac{Y_i - Y}{(Y_i - y')(y - Y_i)E_y(x, Y_i)} &= \frac{1}{y - y'} \sum_{i=1}^{d_2} \left(\frac{y - Y}{(y - Y_i)E_y(x, Y_i)} - \frac{y' - Y}{(y' - Y_i)E_y(x, Y_i)} \right) \\
&= \frac{1}{y - y'} \left(\frac{y - Y}{E(x, y)} - \frac{y' - Y}{E(x, y')} \right)
\end{aligned} \tag{102}$$

Ceci nous permet de calculer trois sommes :

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^{d_2} \frac{(Y_i - Y)E(x,y)E(x',y')^2}{(x - x')(Y_i - y')(x' - X')^2(y' - Y')^2(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)} = \\
& - \frac{E(x',y')^2}{(x - x')(y - y')(x' - X')^2(y' - Y')^2} + \frac{(y' - Y)E(x',y')^2E(x,y)}{(x - x')(y - y')(x' - X')^2(y' - Y')^2(y - Y)E(x, y')} \}
\end{aligned} \tag{103}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{d_2} \frac{(Y_i - Y)E(x,y)}{(x - x')(Y_i - y')(x' - X')(y' - Y')(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)} = \\
& \frac{1}{(x - x')(y - y')(x' - X')(y' - Y')} - \frac{(y' - Y)E(x,y)}{(x - x')(y - y')(x' - X')(y' - Y')(y - Y)E(x, y')} \}
\end{aligned} \tag{104}$$

et

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{d_2} \frac{(Y_i - Y)E(x,y)E(x,y')E(x',y')}{(Y_i - y')(x - X')(x' - X')(y' - Y')(y - Y_i)(y - Y)E_y(x, Y_i)} = \\
& \frac{E(x,y')E(x',y')}{(y - y')(x - X')(x' - X')(y' - Y')} - \frac{(y' - Y)E(x,y)E(x',y')}{(y - y')(x - X')(x' - X')(y' - Y')(y - Y)} \}
\end{aligned} \tag{105}$$

Pour calculer les termes restants, on doit connaître $A = \sum_{i=0}^{d_2} \frac{(Y_i - Y)E(x', Y_i)}{(Y_i - Y')(y - Y_i)E_y(x, Y_i)}$. Pour ce faire, on va calculer A de deux manières différentes.

En écrivant $Y_i - Y = Y_i - Y' + Y' - Y$, on obtient :

$$A = -1 + \frac{E(x', y)}{E(x, y)} + (Y' - Y) \sum_{i=0}^{d_2} \frac{E(x', Y_i)}{(Y_i - Y')(y - Y_i)E_y(x, Y_i)} \quad (106)$$

Alors que $Y_i - Y = Y_i - y + y - Y$ donne :

$$A = -1 + (y - Y) \sum_{i=0}^{d_2} \frac{E(x', Y_i)}{(Y_i - Y')(y - Y_i)E_y(x, Y_i)} \quad (107)$$

Ceci nous permet d'établir l'expression de A :

$$A = -1 + \frac{y - Y}{y - Y'} \frac{E(x', y)}{E(x, y)} \quad (108)$$

On calcule également :

$$B = \sum_{i=0}^{d_2} \frac{(Y_i - Y)E(x', Y_i)}{(Y_i - Y')(y - Y_i)(Y_i - y')E_y(x, Y_i)} = \frac{A(y) - A(y')}{y - y'} \quad (109)$$

$$C = \sum_{i=0}^{d_2} \frac{(Y_i - Y)E(x', Y_i)}{(Y_i - Y')^2(y - Y_i)(Y_i - y')E_y(x, Y_i)} = \frac{\partial B}{\partial Y'} \quad (110)$$

$$D = \sum_{i=0}^{d_2} \frac{(Y_i - Y)E_x(x', Y_i)}{(Y_i - Y')(y - Y_i)(Y_i - y')E_y(x, Y_i)} = \frac{\partial B}{\partial x'} - Y'_x C \quad (111)$$

et

$$E = \sum_{i=0}^{d_2} \frac{(Y_i - Y)E(x', Y_i)}{(Y_i - Y')^2(y - Y_i)E_y(x, Y_i)} = \frac{\partial A}{\partial Y'} \quad (112)$$

Le calcul des termes restants est assez différent. En effet, ces derniers font intervenir des noyaux de Bergmann et ne dépendent pas uniquement de E(x,y).

Tout d'abord, exprimons $\sum_{k=1}^{d_1} \frac{1}{(x' - X'_k)dx} \frac{\partial X'_k}{\partial V_2(y)} - \frac{1}{(y' - Y')dx} \frac{\partial Y'}{\partial V_2(y)}$ en fonction des Y_i et non plus des X_k :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{d_1} \frac{\partial X'_k}{\partial V_2(y)} \frac{1}{x' - X'_k} &= - \sum_{k=1}^{d_1} \frac{B(q, q'_k)}{dy(q)dy(q'_k)} \frac{1}{x(p') - x(q'_k)} \\ &= - \sum_{k=1}^{d_1} \operatorname{Res}_{t \rightarrow q'_k} \frac{dy(t)}{y(t) - y'} \frac{B(q, t)}{dy(q)dy(t)} \frac{1}{x(p') - x(t)} \\ &= \operatorname{Res}_{q'_0, q, p'_i} \frac{dy(t)}{y(t) - y'} \frac{B(q, t)}{dy(q)dy(t)} \frac{1}{x(p') - x(t)} \end{aligned} \quad (113)$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{d_1} \frac{\partial X'_k}{\partial V_2(y)} \frac{1}{(x' - X'_k)} &= \frac{1}{x' - X'} \frac{B(q'_0, q)}{dy dy'} - \frac{1}{(x' - X)(y - y')^2} \\ &+ \sum_{i=0}^{d_2} \frac{B(p'_i, q)}{(y' - Y'_i) dy dx(p'_i)} \end{aligned} \quad (114)$$

D'autre part, on sait que :

$$\frac{1}{(x - X)} \frac{\partial Y'}{\partial V_2(y)} = \frac{B(p', q)}{(x - X) dx' dy} \quad (115)$$

Et la même méthode donne les derniers termes :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{d_1} \frac{\partial X'_k}{\partial V_1(x)} \frac{1}{(x' - X'_k)} &= -\frac{1}{x' - X'} \frac{B(q'_0, p)}{dx dy'} + \frac{1}{(x' - x)^2 (Y - y')} \\ &- \sum_{i=0}^{d_2} \frac{B(p'_i, p)}{(y' - Y'_i) dx dx(p'_i)} \end{aligned} \quad (116)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{d_1} \frac{\partial X'_k}{\partial V_2(Y_i)} \frac{1}{(x' - X'_k)} &= \frac{1}{x' - X'} \frac{B(q'_0, p_i)}{dy(p_i) dy'} - \frac{1}{(x' - x) (y' - Y_i)^2} \\ &+ \sum_{j=0}^{d_2} \frac{B(p'_j, p_i)}{(y' - Y'_j) dy(p_i) dy(p'_j)} \end{aligned} \quad (117)$$

$$\frac{\partial Y'}{\partial V_2(Y_i)} = \frac{B(p', p_i)}{dx' dy(p_i)} \quad (118)$$

et

$$\frac{1}{(y - Y)} \frac{\partial Y'}{\partial V_1(x)} = -\frac{B(p', p)}{(x - X) dx' dx} \quad (119)$$

Finalement, on obtient pour $W(x, y; x', y')$ l'expression :

$$\begin{aligned} (Y - y) W(x, y; x', y') &= \\ \frac{E(x, y) E(x', y')}{(x - X)(x' - X')(y' - Y')} &\left\{ \frac{B(q', p)}{(y - Y)(x' - X') dx dy'} - \frac{B(q', q)}{(x - X)(x' - X') dy dy'} \right. \\ + \sum_{i=0}^{d_2} \left[\left(\frac{1}{y - Y} - \frac{1}{y - Y_i} \right) \left(\frac{B(q'_0, p_i)}{(x' - X') dy' dx} - \frac{B(p', p_i)}{(y' - Y') dx dx'} + \sum_{j=0}^{d_2} \frac{B(p'_j, p_i)}{(y' - Y'_j) dx dy(p'_j)} \right) \right. \\ &\left. \left. - \frac{1}{y' - Y'_i} \left(\frac{B(p'_i, q)}{(x - X) dy dx(p'_i)} + \frac{B(p'_i, p)}{(y - Y) dx dx(p'_i)} \right) \right] \right\} \\ + \frac{E(x, y) E(x', y')}{(x - x')(y - y')(x - X)(x' - X')(y' - Y')} &\left[\frac{1}{(x - x')(y' - Y)} + \frac{1}{(y - y')(x' - X)} \right] \\ - \frac{(y - Y) E(x', y) E(x, y')}{(x - x')^2 (y - y')^2 (x - X')(x' - X)(y - Y')(y' - Y)} &+ \frac{E(x, y) E(x, y')}{(x - x')^2 (y - y')^2 (x - X)(x - X')(y - Y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(y'-Y)E(x,y)}{(x-x')(y-y')(x-X)(x'-X')(y'-Y')(y-Y)E(x,y')} \frac{E(x',y')E_y(x,y') - E_y(x',y')E(x,y')}{(x-X')} \\
& - \frac{(y'-Y)E(x,y)E(x',y')}{(y-y')(x-X)(x-X')(x'-X')(y'-Y')(y-Y)} \left[\frac{1}{(x-x')(y'-Y')} - \frac{X'_y}{(x-X')(x'-X')} \right] \\
& + \frac{(y'-Y)Y'_xE(x,y)E(x',y')^2}{(x-x')(y-y')(x-X)(x'-X')(y'-Y')^3(y-Y)E(x,y')} \\
& - \frac{Y'_xE(x',y')^2}{(x-x')(y-y')(x-X)(x'-X')(y'-Y')(y-Y')^2} \\
& \quad (120)
\end{aligned}$$

Cette expression ne dépendant que de $E(x,y)$ et du noyau de Bergmann, elle est totalement calculable. Cependant, avant de la déterminer à la limite conforme, il est utile de s'intéresser d'abord au cas de $W(x,y)$ dont je n'ai pas encore achevé le calcul.

5 Remerciements.

Pour conclure, je tiens à remercier Bertrand Eynard qui, au cours de ces quelques mois de stage, m'a beaucoup appris et guidé que ce soit par l'intermédiaires des cours qu'il me donnait ou grâce aux nombreuses idées de problèmes qu'il m'a proposées.

References

- [1] G. Akemann, "Higher genus correlators for the hermitian matrix model with multiple cuts", *Nucl. Phys.* B482 (1996) 403-430, hep-th/9606004.
- [2] J. Ambjorn, G. Akemann, "New universal spectral correlators", *J. Phys.* A29 (1996) L555-L560, cond-mat/9606129.
- [3] I. Antoniadis, G. Ovarlez, An introduction to perturbative and non-perturbative string theory, hep-th/9906108.
- [4] T. Banks, W. Fischer, S.H. Shenker, L. Susskind, *Phys. Rev.* D55 (1997) 5112, hep-th/9610043.
- [5] A. Bilal, M(atrix) theory: A pedagogical introduction, *Fortsch. Phys.* 47, (1999), 5, hep-th/9710136.
- [6] D.V. Boulatov and V.A. Kazakov, "The Ising model on a random planar lattice: the structure of the phase transition and the exact critical exponents", *Phys. Lett. B* **186**, 379 (1987).
- [7] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi, and J. Zuber, *Comm. Math. Phys.* **59**, 35 (1978).
- [8] J.M. Daul, V. Kazakov, I.K. Kostov, "Rational Theories of 2D Gravity from the Two-Matrix Model", *Nucl. Phys.* **B409**, 311-338 (1993), hep-th/9303093.

- [9] F. David, “Planar diagrams, two-dimensional lattice gravity and surface models”, *Nucl. Phys.* **B 257** [FS14] 45 (1985).
- [10] F. David, *Nuc.Phys.* B257 (1985) 543, V. Kazakov, *Phys. Lett.* 150B (1985) 282, J. Ambjørn, B. Durhuus, J. Frölich, *Nuc. Phys.* B259 (1985) 433.
- [11] P. Di Francesco, P. Ginsparg, J. Zinn-Justin, “2D Gravity and Random Matrices”, *Phys. Rep.* **254**, 1 (1995).
- [12] R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde, *Nucl. Phys.* B500 (1997) 43, hep-th/9703030.
- [13] R. Dijkgraaf, C. Vafa, ”A Perturbative Window into Non-Perturbative Physics”, hep-th/0208048, ”On Geometry and Matrix Models”, *Nucl.Phys.* **B644** (2002) 21-39, hep-th/0207106, ”Matrix Models, Topological Strings, and Supersymmetric Gauge Theories”, *Nucl.Phys.* **B644** (2002) 3-20, hep-th/0206255.
- [14] B. Eynard “An introduction to random matrices”, lectures given at Saclay, October 2000, notes available at <http://www-sph.tce.fr/articles/t01/014/>.
- [15] B. Eynard “Gravitation quantique bidimensionnelle et matrices aléatoires”, Thèse de doctorat de l'université Paris 6 (1995).
- [16] B. Eynard, “Large N expansion of the 2-matrix model”, *JHEP* **01** (2003) 051, hep-th/0210047.
- [17] B. Eynard, “Large N expansion of the 2-matrix model, multicut case”, preprint SPHT03/106, ccsd-00000521, math-ph/0307052.
- [18] B. Eynard, “Eigenvalue distribution of large random matrices, from one matrix to several coupled matrices” *Nucl. Phys.* **B506**, 633 (1997), cond-mat/9707005.
- [19] B. Eynard, “Correlation functions of eigenvalues of multi-matrix models, and the limit of a time dependent matrix”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31**, 8081 (1998), cond-mat/9801075.
- [20] H.M. Farkas, I. Kra, ”Riemann surfaces” 2nd edition, Springer Verlag, 1992.
- [21] J.D. Fay, ”Theta functions on Riemann surfaces”, Springer Verlag, 1973.
- [22] M. R. Gaberdiel, An introduction to conformal field theory, *Rept. Prog. Phys.* 63 (2000) 607, hep-th/9910156.
- [23] P. Ginsparg, *Matrix models of 2D gravity* (Trieste Summer School, July 1991).
- [24] *Two dimensional quantum gravity and random surfaces*, edited by D. Gross, T. Piran, and S. Weinberg (Jerusalem winter school, World Scientific, 1991).

- [25] T. Guhr, A. Mueller-Groeling, H.A. Weidenmuller, “Random matrix theories in quantum physics: Common concepts”, *Phys. Rep.* **299**, 189 (1998).
- [26] N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa, A. Tsuchiya, *Nucl. Phys.* B498 (1997) 467, hep-th/9612115.
- [27] V.A. Kazakov, “Ising model on a dynamical planar random lattice: exact solution”, *Phys Lett.* **A119**, 140-144 (1986).
- [28] V.A. Kazakov, A. Marshakov, ”Complex Curve of the Two Matrix Model and its Tau-function”, *J.Phys.* **A36** (2003) 3107-3136, hep-th/0211236.
- [29] V.G. Knizhnik, A.M. Polyakov, A.B. Zamolodchikov, *Mod. Phys. Lett.* A3 (1988) 819.
- [30] H. Kunz, *Matrices aléatoires en Physique*, Cahiers de physique, presses polytechniques et universitaires romandes, 1998.
- [31] M.L. Mehta, *Random Matrices*, 2nd edition, (Academic Press, New York, 1991).
- [32] M. Staudacher, “ Combinatorial solution of the 2-matrix model”, *Phys. Lett.* **B305** (1993) 332-338.
- [33] G. ’t Hooft, *Nuc. Phys.* **B72**, 461 (1974).
- [34] J.J.M. Verbaarschot, “Random matrix model approach to chiral symmetry”, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **53**, 88 (1997).